Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

UGA–130(A)

B.A. (Part–II) Due 1st Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 68*

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) If :

$$\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

then find :

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

यदि :

$$\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

तब ज्ञात कीजिए :

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

(ii) Write the definition of curl of a vector point function.

सदिश बिन्दु फलन के कुन्तल की परिभाषा लिखिए।

(iii) If $f(t) = (t - t^2)i + 2t^3j - 3k$, then find :

$$\int f(t)dt$$

यदि $f(t) = (t - t^2)i + 2t^3j - 3k$, तो ज्ञात कीजिए :

$$\int f(t)dt$$

(iv) Write the statement of Stoke's theorem.

स्टॉक प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

(v) What conic does the following equation represent ?

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

समीकरण $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$ कौनसे शांकव को निरूपित करता है ?

(vi) Write the general equation of a circle in polar coordinates.

वृत्त का ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यापक समीकरण लिखिए।

(vii) Write the diameter form of the equation of a sphere.

व्यास रूप में गोले का समीकरण लिखिए।

(viii) Write the definition of great circle.

वृहत्वृत्त की परिभाषा लिखिए।

(ix) Write the definition of Enveloping cylinder.

अन्वालोपी बेलन की परिभाषा लिखिए।

(x) Write the definition of reciprocal cone.

व्युत्क्रम शंकु की परिभाषा लिखिए।

(xi) Write the definition of director sphere.

नियामक गोले की परिभाषा लिखिए।

(xii) Write the definition of diametral plane.

व्यासंग समतल की परिभाषा लिखिए।

Section–B (खण्ड–ब)

2. If :

$$\vec{f} = (ax+3y+4z)\hat{i} + (x-2y+3z)\hat{j} + (3x+2y-z)\hat{k}$$

is a Solenoidal vector, find a.

यदि :

$$\vec{f} = (ax+3y+4z)\hat{i} + (x-2y+3z)\hat{j} + (3x+2y-z)\hat{k}$$

परिनालिकीय सदिश हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

***Or* (अथवा)**

Find the directional derivative of $f = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $i + 2j + 2k$ at the point (1, 2, 0).

बिन्दु (1, 2, 0) पर $f = xy + yz + zx$ का $i + 2j + 2k$ की दिशा में दिक् अवकलन ज्ञात कीजिए।

3. Evaluate :

$$\int_C \vec{F} . d\vec{r}$$

where $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ and C is the curve $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, t varying form –1 to +1.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C \vec{F} . d\vec{r}$$

जहाँ $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ और C वक्र $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ है तथा t का मान –1 से +1 तक विचरण करता है।

***Or* (अथवा)**

Evaluate :

$$\iint_S \vec{F} . \hat{n}\, dS$$

where $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ S is the surface of the cube bounded by the planes : $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\iint_S \vec{F} . \hat{n}\, dS$$

जहाँ $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$, S उस घन का पृष्ठ है जो निम्न समतलों में परिबद्ध है :

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$$

4. What conic does the following equation represent ? Find its centre and the equation to the conic referred to the centre as origin :

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

निम्न समीकरण कौनसे शांकव को निरूपित करता है ? इसके केन्द्र के निर्देशांक तथा इसके केन्द्र को मूल बिन्दु मानकर शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

Or (अथवा)

Prove that the line :

$$\frac{l}{r} = \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta$$

will touch the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ if $(\mathrm{A} - e)^2 + \mathrm{B}^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि रेखा :

$$\frac{l}{r} = \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta$$

शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्पर्श करेगी, यदि $(\mathrm{A} - e)^2 + \mathrm{B}^2 = 1$।

5. A plane passes through a fixed point (a, b, c) and cut the axes at A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere OABC is $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$.

एक समतल स्थिर बिन्दु (a, b, c) से गुजरता है एवं निर्देशी अक्षों को बिन्दु A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दुपथ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ ।

Or (अथवा)

Show that the equation of the cone whose vertex is the origin and base curve $f(x, y) = 0$, $z = c$ is $f\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}\right) = 0$.

सिद्ध कीजिए कि उस शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है तथा निर्देशांक वक्र $f(x, y) = 0$, $z = c$ है, $f\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}\right) = 0$ होगा।

6. Tangent planes are drawn from the point (α, β, γ) to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Show that the perpendicular drawn from the origin on them generate the cone.

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ पर बिन्दु (α, β, γ) से स्पर्श समतल खींचे गये हैं। सिद्ध कीजिए कि उन पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब द्वारा निम्न शंकु बनता है :

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

Or **(अथवा)**

Prove that the axes of the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by the plane $lx + my + nz = 0$ lie on the cone $\frac{(b-c)l}{x}=\frac{(c-a)m}{y}=\frac{(a-b)m}{z}$.

सिद्ध कीजिए कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को समतल $lx + my + nz = 0$ से काटने पर परिच्छेद के अक्ष निम्न शंकु पर स्थित होते हैं :

$$\frac{(b-c)l}{x}=\frac{(c-a)m}{y}=\frac{(a-b)m}{z}$$

Section–C (खण्ड–स)

7. (a) Prove that the necessary and sufficient condition that $a(t)$ is a vector of constant magnitude is $a \cdot \frac{da}{dt}=0$.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश $a(t)$ का परिमाण अचर होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबद्ध $a \cdot \frac{da}{dt}=0$ है।

(b) Prove that :

$$\text{div } (a \times b) = b.\text{curl } a - a.\text{curl } b$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{div } (a \times b) = b.\text{curl } a - a.\text{curl } b$$

8. (a) Using Stoke's theorem, evaluate :

$$\int_C xydx + xy^2dy$$

where C is the square in the xy plane with vertices respectively (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1).

स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C xydx + xy^2dy$$

जहाँ C, xy समतल में एक वर्ग है जिसके शीर्ष क्रमशः (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1) हैं।

(b) Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C (e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy)$$

where C is the rectangle with vertices are $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ग्रीन प्रमेय से मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy)$$

जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हैं।

9. Trace the following curve :

$$x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$$

निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$$

10. (a) Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y - z + 2 = 0$ at the point $(1, -2, 1)$ and also cuts orthogonally the sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $3x + 2y - z + 2 = 0$ को बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर स्पर्श करता है तथा गोले को लाम्बिक रूप से काटता है :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

(b) The plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ meets the coordinates axes in A, B, C respectively, prove that the equation to the cone generated by the lines drawn from O to meet the circle ABC is :

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$

समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ अक्षों को बिन्दु A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि O से गुजरने वाली तथा वृत्त को प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण है :

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$

11. (a) The section of the enveloping, cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ whose vertices in P, by the plane $z = 0$ is a rectangular hyperbola. Find the locus of P.

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के शीर्ष P वाले अन्वालोपी शंकु का तल $z = 0$ से परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय है। P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

(b) Find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

दीर्घवृतज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के समान संयुग्मी व्यास का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।